Bevezetés a számításelméletbe II.

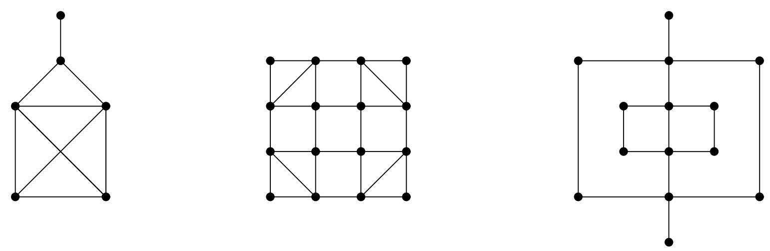
1. gyakorlat - Euler és Hamilton körök

Szatmári Zoltán - zee@cs.bme.hu

Tudnivalók:

- Ismétlés: gráf, egyszerű gráf, összefüggőség, komponens, fok, fokok összege, élsorozat/séta, út, kör
- Euler kör: Minden élet érintő kör
- Hamilton kör: Minden pontot érintő kör
- Dirac-tétel: Ha minden pontra fokszám $\geq \frac{n}{2}$ akkor létezik H-kör.
- Ore-tétel: Ha minden nem összekötött X, Y párra $d(X) + d(Y) \geq n$ akkor létezik H-kör.

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan kétszer megyünk át!
2. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van zárt Euler-köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
3. Milyen n esetén tartalmaz a teljes n pontú gráf Euler-kört illetve -utat?
4. Milyen x és y értékekre tartalmaz ilyet az $x \times y$ méretű „kockás" papír, aminek $(x + 1) \times (y + 1)$ pontja van? **(*)**
5. Van-e Euler-kör illetve Euler-út az alábbi gráfokban? **(HF)**



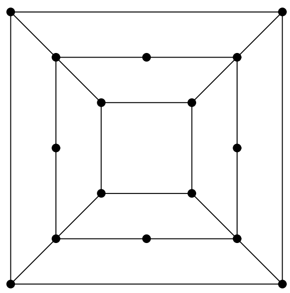
6. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának a foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék!
7. Képzeljünk el egy képzőművészeti kiállítást! A látogatók szeretik a saját lelkiviláguk szerint élvezni a tárlat anyagát, azaz annyira elmerülnek az esztétikai élmények kavalkádjában, hogy útjelző táblák figyelemmel követésére már nem képesek. Annyi azért persze még tőlük is elvárható, hogy mindig olyan folyosón haladnak tovább, amerre addig még nem jártak és ha egy adott pillanatban látnak ilyen folyosót, akkor azok egyikén tovább is haladnak.

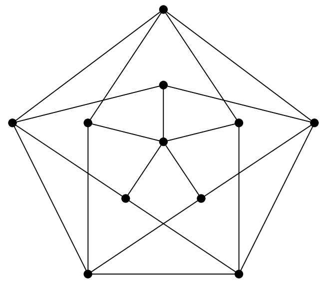
   Feladat: határozzuk meg, milyen lehet egy ilyen kiállítócsarnok, ha azt szeretnénk, hogy az összes látogató a saját korlátoltsága ellenére végignézhesse a kiállítást!

8. Igazoljuk, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a gráf két pontosztálya azonos elemszámú!

9. Igazoljuk, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor bármely v csúcsára és bármely e élére a $G - v$ és a $G - e$ gráf is összefüggő!

10. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfokban?





11. Be lehet-e járni huszárral egy 4×4-es sakktáblát?

12. Milyen m és n értékekre tartalmaz Hamilton-kört illetve -utat az $m \times n$ méretű négyzetháló-gráf (amelynek összesen $(m + 1) \times (n + 1)$ pontja van)?

13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n + 1$ pontú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n, akkor a gráfban van Hamilton-út! **(*)**

14. Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfban nincsen Hamilton-kör!

15. Egy szállodába egy 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal körül ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap este haza megy. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a szállodában tölt a társaság! **(*)**

16. Az alábbi térképen a Balatoni hajójáratok egy elképzelt hálózatát látjátok. Ödön, a lelkes magyar tengerész elhatározta, hogy a következő utazásokat teszi meg:

    - Minden hajóutat kipróbál, mielőtt visszaér az induló helyre.
    - Minden hajóutat kipróbál.
    - Minden várost érintve visszatér az induló állomásra. **(HF)**
    - Minden várost érint. **(HF)**

    Melyik utazás lehetséges, ha megfelelően sok pénzzel rendelkezik?